ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 2025

ΘΕΜΑ Α

Α1. θεωρία σχολικού βιβλίου σελ 186

Α2. θεωρία σχολικού βιβλίου σελ 76

Α3. θεωρία σχολικού βιβλίου σελ 161

Α4. α. Σωστό , β. Σωστό , γ. Λάθος , δ. Λάθος , ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με $f'(\chi) = 3\chi^2 + 2\alpha\chi + 9$

$1 \epsilon R$, η f έχει ακρότατο στο 1 άρα από Θ.Fermat :

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -6$$

Β2. Για $\alpha = -6$ η $f(\chi) = \chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi - 3$,

$$f'(\chi) = 3\chi^2 - 12\chi + 9 = 3(\chi^2 - 4\chi + 3)$$

x	$-\infty$ 1	1 3	3 $+\infty$
f'(x)	+	-	+
f(x)	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$$A = f((-\infty, 0]) = (\lim_{\chi \to -\infty} f(\chi), f(0)] = (-\infty, -3]$$

$$A_1 = f((0,1]) = (\lim_{\chi \to 0^+} f(\chi), f(1)] = (-3, 1]$$

$$A_2 = f([1,3]) = [f(3), f(1)] = [-3, 1]$$

$$A_3 = f([3,+\infty)) = [f(3), \lim_{\chi\to+\infty} f(\chi)) = [-3, +\infty)$$

Αφού $\lim_{\chi\to+\infty} f(\chi) = \lim_{\chi\to+\infty}(\chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi - 3) = \lim_{\chi\to+\infty} \chi^3 = +\infty$

Επειδή $0 \notin A$ η εξίσωση $f(\chi) = 0$, δεν έχει ρίζα $\sigma\tau o\ (-\infty, 0]$

Επειδή $0 \in A_1$ η εξίσωση $f(\chi) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\chi_1 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $f(\chi_1) = 0$ και επειδή f γνησίως μονότονη άρα και 1 – 1 θα είναι μοναδική.

Επειδή $0 \in A_2$ η εξίσωση $f(\chi) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\chi_2 \in (1,3)$, τέτοιο ώστε $f(\chi_2) = 0$ και επειδή f γνησίως μονότονη άρα και 1 – 1 θα είναι μοναδική

Επειδή $0 \in A_3$ η εξίσωση $f(\chi) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\chi_3 \in (1,+\infty)$, τέτοιο ώστε $f(\chi_3) = 0$ και επειδή f γνησίως μονότονη άρα και 1 – 1 θα είναι μοναδική

άρα η εξίσωση $f(\chi) = 0$ έχει ακριβώς 3 θετικές πραγματικές ρίζες.

Β3.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$$

$$f''(x) > 0 <=> 6x - 12 > 0 <=> x > 2$$

f συνεχής στο [2,+∞) οπότε f κυρτή στο [2,+∞)

$$f''(x) < 0 <=> 6x - 12 < 0 <=> x < 2$$

f συνεχής στο (-∞,2] οπότε f κοίλη στο (-∞,2]

η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_0 = 2$ το f(2)=-1

Β4.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f για x=ξ είναι

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow$$

$$y = f'(\xi)x - \xi f'(\xi) + f(\xi) \qquad (1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g για x=ξ είναι

$$y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow$$

$$y-(f(\xi)+\xi)=(f'(\xi)+1)(x-\xi)\Leftrightarrow$$

$$y=(f'(\xi)+1)x-\xi f'(\xi)-\xi+f(\xi)+\xi\Leftrightarrow$$

$$y=(f'(\xi)+1)x-\xi f'(\xi)+f(\xi)\quad(2)$$

από τις (1) και (2) $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ f'(\xi)x-\xi f'(\xi)+f(\xi)=f'(\xi)x+x-\xi f'(\xi)+f(\xi)\Leftrightarrow x=0$

άρα το σημείο τομής των εφαπτομένων είναι πάνω στον άξονα y΄y

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(e^x\eta\mu x)=1\cdot0=0$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{x^2+x}\right)=\sqrt{0^2+0}=0$$

f(0)=$\sqrt{0^2+0}$=0

Επειδή f(0)= $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)$=0 άρα f συνεχής στο x_0=0

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}\right)=$$

$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=+\infty$, αφού ισχύει $|x|=x$, καθώς x>0

Οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0=0.

Γ2. $D_f=\mathbb{R}$

- η συνάρτηση f είναι συνεχής στο (-∞,0) ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- η συνάρτηση f είναι συνεχής στο (0, +∞) ως σύνθεση συνεχών συναρτήεων
- η f συνεχής στο 0,
  άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Θα ψάξουμε οριζόντια/πλάγια ασύμπτωτη στο -∞

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}e^x\eta\mu\chi=0$, γιατί

$$|\eta\mu\chi|\le1\Leftrightarrow|e^x\eta\mu\chi|\le|e^x|\Leftrightarrow-e^x\le e^x\eta\mu\chi\le e^x$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-e^x) = 0,\ και\ \lim_{x\to-\infty} e^x = 0,$$

Οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to-\infty} e^x ημχ = 0.$

Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο -∞ τη y=0 (άξονας x'x)

Θα ψάξουμε οριζόντια/πλάγια ασύμπτωτη στο +∞

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1} = 1$, αφού ισχύει $|x| = x,$ καθώς x>0

Αφού $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x}) = 1$ +0 = 1

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

αφού ισχύει $|x| = x,$ καθώς x>0

Άρα $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο +∞

Γ3. Όταν x∈(-∞,0) τότε f(x)= $e^x ημx$, οπότε πρέπει να δείξουμε ότι η εξίσωση

$e^x ημx = x + \frac{1}{2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (-π,0)

Θεωρούμε συνάρτηση g(x)= $e^x ημx - x - \frac{1}{2}$, x∈[-π,0]

Η g είναι συνεχής στο [-π,0], ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

g(0)= $e^0 ημ0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$

g(-π)= $e^{-\pi}ημ(-\pi) - (-\pi) - \frac{1}{2} = -e^{-\pi}ημ\pi + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$

Άρα g(0)·g(-π)<0, οπότε ισχύει το θεώρημα BOLZANO και υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(-π,0) τέτοιο ώστε g(ξ)=0⇒ $f(\xi) = \xi + \frac{1}{2}$

Γ4. Είναι y(t)=$\sqrt{x^2(t)+x(t)}$, t≥0 παραγωγίσιμη με

y΄(t)=$\frac{2x(t)x'(t)+x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}}$ (1)

Έστω ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0 τέτοια ώστε y΄$(t_0)=x'(t_0)$ (2)

Εφόσον x≥0, τότε και x(t)≥0

Τότε είναι x΄$(t_0)=\frac{x'(t_0)(2x(t_0)+1)}{2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}=2x(t_0)+1 \Leftrightarrow$

$4x^2(t_0)+4x(t_0)=4x^2(t_0)+4x(t_0)+1 \Leftrightarrow 0=1$ άτοπο

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 τέτοια ώστε y΄$(t_0)=x'(t_0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$g(\chi)=\frac{F(\chi)}{\chi^{ln\chi}}\ ,\chi>0$$

g συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$g΄(\chi)=\frac{F΄(\chi)\chi^{ln\chi}-F(\chi)\left(\chi^{ln\chi}\right)΄}{(\chi^{ln\chi})^2}=\frac{\chi F΄(\chi)\chi^{ln\chi}-\chi F(\chi)\left(\chi^{ln\chi}\right)΄}{\chi(\chi^{ln\chi})^2}=$$

$$=\frac{\chi f(\chi)\chi^{ln\chi}-\chi F(\chi)\left(\chi^{ln\chi}\right)΄}{\chi(\chi^{ln\chi})^2}=\frac{2F(\chi)ln\chi\chi^{ln\chi}-\chi F(\chi)\left(e^{ln\chi\cdot ln\chi}\right)΄}{\chi(\chi^{ln\chi})^2}=$$

$$=\frac{2F(\chi)ln\chi\chi^{ln\chi}-\chi F(\chi)\left(e^{\ln^2\chi}\right)΄}{\chi(\chi^{ln\chi})^2}=\frac{2F(\chi)ln\chi\,\chi^{ln\chi}-\chi F(\chi)\left(\chi^{ln\chi}\right)(\ln^2\chi)΄}{\chi(\chi^{ln\chi})^2}=$$

$$=\frac{2F(\chi)ln\chi\,\chi^{ln\chi}-\chi F(\chi)\left(\chi^{ln\chi}\right)2ln\chi\frac{1}{\chi}}{\chi(\chi^{ln\chi})^2}=\frac{2F(\chi)ln\chi\,\chi^{ln\chi}-2F(\chi)ln\chi\,\chi^{ln\chi}}{\chi(\chi^{ln\chi})^2}=0$$

Άρα g σταθερή.

Δ2.

i) Στη σχέση $\chi f(\chi) = 2F(\chi)ln\chi$ αντικαθιστούμε χ=1 και έχουμε: $f(1) = 0$ Επίσης, αφού η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο 1 είναι παράλληλη στην ε:y=2x θα ισχύει: $f\,'(1) = 2$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{\ln x}$$

$$g(x) = \frac{F(x)}{\chi^{ln\chi}} = c \Leftrightarrow F(x) = c \cdot x^{lnx}$$

για x=1 : $F(1) = c \cdot 1^{ln1} = c \cdot 1^0 = c$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x^{lnx}} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{f'(1)}{1} = 2$$

f' είναι συνεχής στο $x_0 = 1$άρα $\lim_{x\to 1} f'(x) = f'(1)$

γιατί $F(x) = c \cdot x^{lnx}$που είναι 3 φορές παραγωγίσιμηγια x>0 άρα f΄ είναι παραγωγίσιμη άρα συνεχής.

ii) F συνεχής άρα:

$\lim_{\chi\to 1} F(\chi) = F(1) \Leftrightarrow \lim_{\chi\to 1} \frac{\chi}{2}\frac{f(\chi)}{ln\chi} = F(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}2 = F(1) \Leftrightarrow F(1) = 1$ από **Δ2i)**

Άρα $F(\chi) = c\ \cdot e^{\ln^2 \chi}$, για $\chi = 1\ έχουμε\ F(1) = c\ \cdot e^{\ln^2 1} \Leftrightarrow 1 = c\, e^0 \Leftrightarrow c = 1$

Οπότε $F(\chi) = \chi^{ln\chi}$.

Δ3.

Έχουμε , $F(\chi) = \chi^{ln\chi} = e^{\ln^2 \chi}, \chi > 0$

$$F'(\chi) = \left(\chi^{ln\chi}\right)' = (e^{\ln^2 \chi})' = e^{\ln^2 \chi} \cdot (\ln^2 \chi)' = e^{\ln^2 \chi} \cdot 2ln\chi \cdot \frac{1}{\chi} = 2\chi^{ln\chi}\frac{ln\chi}{\chi}$$

Αν $\chi > 1 \Leftrightarrow ln\chi > 0$, τότε $F'(\chi) > 0$ άρα F γνησίως αύξουσα $[1, +\infty)$.

Αν $0 < \chi < 1 \Leftrightarrow ln\chi < 0$, τότε $F'(\chi) < 0$ άρα F γνησίως φθίνουσα $(0\,, 1]$

Η εξίσωση $F(\chi^2) = F(\chi) - (\chi - 1)^2$, ορίζεται για $\chi > 0$

$$F(\chi^2) - F(\chi) + (\chi - 1)^2 = 0$$

Για χ = 1 : $F(1) - F(1) + (1 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ισχύει άρα x=1 ρίζα της εξίσωσης

$$(\chi - 1)^2 > 0 \;για\; κάθε\; x > 0 \;και\; x \neq 1$$

Για $\chi > 1 \Leftrightarrow \chi^2 > \chi \xLeftrightarrow{F\; γνησίως\; αυξουσα\; στο\; (1,+\infty)} F\,(\chi^2) > F(\chi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(\chi^2) - F(\chi) > 0 \xLeftrightarrow{(\chi-1)^2>0\; για\; \chi>1} F(\chi^2) - F(\chi) + (\chi - 1)^2 > 0$,

Άρα δεν έχει ρίζα στο $(1, +\infty)$.

Για $0 < \chi < 1 \Leftrightarrow \chi^2 < \chi \xLeftrightarrow{F\; γνησίως\; φθίνουσα\; στο\; (0,1)} F\,(\chi^2) > F(\chi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(\chi^2) - F(\chi) > 0 \xLeftrightarrow{(\chi-1)^2>0\; για\; 0<\chi<1} F(\chi^2) - F(\chi) + (\chi - 1)^2 > 0$,

Άρα δεν έχει ρίζα στο $(0\,, 1)$.

Οπότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο χ = 1.

Δ4. Ισχύει ότι: $E = \int_1^e |F(x)|\, dx$

από Δ2 η F(x)≥1 , x>0 αφού παρουσιάζει ο.ε. στο $\chi_0 = 1$ άρα $E = \int_1^e F(x)\, dx$

$F(x) = x^{lnx} = e^{ln^2 x}$ ισχύει για κάθε x> 0 Ισχύει $lnx \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$, θέτουμε όπου x το $e^{\ln^2 x}$

$e^{ln^2 x} \geq ln^2 x + 1$ επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για χ=1

$$\int_1^e e^{ln^2 x} dx > \int_1^e (ln^2 x + 1) dx \Leftrightarrow \int_1^e F(x)\, dx > \int_1^e (ln^2 x + 1) dx$$

$\cdot \displaystyle\int_1^e 1 dx = e - 1$

$\cdot \int_1^e ln^2 x dx = \int_1^e (x)' \ln^2 x\, dx = [x ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \cdot 2lnx \cdot \frac{1}{x} dx = e - 2[xlnx - x]_1^e = e - 2$

άρα E>e-1+e-2=2e-3